Chapitre

Dérivation

Contenu du progrmme
- Continuité et dérivabilité ;
- Dérivabilité de la composé de deux fonctions dérivables ;
- Dérivée de la fonction réciproque ; Puissances rationnelles x^r $(r \in \mathbb{R}^*)$; propriétés.

Capacités attendues
- Calculer les dérivées des fonctions usuelles ;
-Déterminer la monotonie d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.
- Déterminer la monotonie d'une fonction à partir de son tableau de variation ou de sa représentation graphique.
- Résoudre graphiquement des équations de la forme $f(x) = g(x)$ et des inéquations de la forme $f(x) \leq g(x)$;
- Déterminer la monotonie de la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone et représenter graphiquement la fonction réciproque ;
- Déterminer le nombre dérivée de la fonction réciproque d'une fonction en un point ;

Recommandation pédagogiques
- On rappellera la notion de dérivation et ses applications à partir d'activités variées faisant apparaitre son importance dans l'étude locale et globale des fonctions au programme surtout l'approximation locale d'une fonction, l'étude du sens de variation d'une fonction sur un intervalle, la détermination des extrema et l'étude du signe d'une fonction ou d'une égalité algébrique sur un intervalle ou la concavité de la courbe d'une fonction numérique..., ce sera également une occasion pour rappeler la propriété caractéristique d'une fonction constante ou strictement monotone sur un intervalle ;
- Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques usuelles sont hors programme ;

I Dérivabilité dune fonction numérique (Rappels)

1 Dérivabilité dune fonction en un point

D Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Le réel ℓ est appelé nombre dérivé de la fonction f en x_0 et noté $f'(x_0) = \ell$.

Exemple

f est une fonction numérique définie par : $f(x) = 2x^2$. Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = 2$ On a : $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 2(x+2) = 8$ Donc f est dérivable en $x_0 = 2$ et on a : $f'(2) = 8$

b Interprétation géométrique

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Exemple

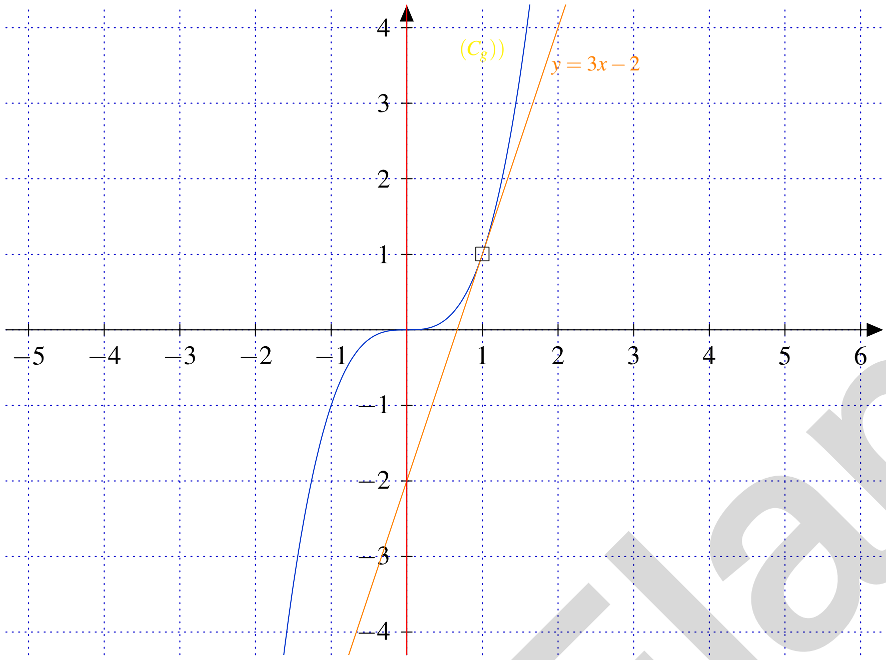
Soit g une fonction numérique définie par : $g(x) = x^3$.
1. Étudions la dérivabilité de g en 1 . On a :

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3$$

Donc g est dérivable en 1 , et On a : $g'(1) = 3$. 2 Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1. On a : $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$ Donc l'équation de la tangente à (C_f) est :

$$\begin{aligned} y &= g'(1)(x-1) + g(1) \\ y &= 3(x-1) + 1 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

D'où $(T) : y = 3x - 2$.



Exercice d'application
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

1 Étudier la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
2 Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

2 Dérivabilité à gauche - Dérivabilité à droite

a Définition et propriété

D Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0; \alpha[$.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$.
Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f à droite en x_0 et noté $f'_d(x_0) = \ell$. - Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]\alpha; x_0]$.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$.
Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0 et noté $f'_g(x_0) = \ell$.

Propriété

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Exemple

□ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$.
1. Étudions la dérivabilité de f à droite en 1 :

On a : $\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}x+1=2.$
D'où f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1)=2.$
2. Étudions la dérivabilité de f à gauche en 1 :
On a : $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-2.$
D'où f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1)=-2$
3. Déduisons que f n'est pas dérivable en 1
Puisque $f'_d(1)\neq f'_g(1)$ alors f n'est pas dérivable en 1 .

b Interprétation géométrique

Propriété

- Soit f une fonction dérivable à droite en x_0.
Une équation de la demi-tangente à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse x_0 est :

$$\begin{cases} y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\geq x_0\end{cases}$$

- Soit f une fonction dérivable à gauche en x_0.
Une équation de la demi-tangente à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse x_0 est :

$$\begin{cases} y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\\ x\leq x_0\end{cases}$$

Exemple

D'après l'exemple précédent : □ On a f est dérivable à droite en 1 , alors $\left(C_f\right)$ admet une demi-tangente (T_1) au point d'abscisse 1 d'équation :

$$\begin{cases} y=f'_d(1)(x-1)+f(1)\\ x\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=2(x-1)+0\\ x\geq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=2x-2\\ x\geq 1\end{cases}$$

On a f est dérivable à gauche en 1 , alors $\left(C_f\right)$ admet une demi-tangente (T_2) au point d'abscisse 1 d'équation :

$$\begin{cases} y=f'_g(1)(x-1)+f(1)\\ x\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-2(x-1)+0\\ x\leq 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=-2x+2\\ x\leq 1\end{cases}$$

c Récapitulatif

- $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
  - $a \in \mathbb{R}^*$ → (C) admet une tangente de coeffcient directeur a à droite en x_0 .
  - 0 → (C) admet une tangente horizontale à droite en x_0 .
  - $+\infty$ → (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .
  - $-\infty$ → (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .
- $\lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
  - $a \in \mathbb{R}^*$ → (C) admet une demi-tangente de coeffcient directeur a à droite en x_0 .
  - 0 → (C) admet une demi-tangente horizontale à droite en x_0 .
  - $+\infty$ → (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite en x_0 .
  - $-\infty$ → (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à droite en x_0 .
- $\lim_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
  - $a \in \mathbb{R}^*$ → (C) admet une demi-tangente de coeffcient directeur a à gauche en x_0 .
  - 0 → (C) admet une demi-tangente horizontale à gauche en x_0 .
  - $+\infty$ → (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas à gauche en x_0 .
  - $-\infty$ → (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche en x_0 .

3 Fonction dérivée

a Définition

D Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si f est dérivable en tout point de I.
- La fonction f' définie sur I par : $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de la fonction f.

D Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- Si la fonction dérivée f' est dérivable sur I, alors sa fonction dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f et on la note f''
- De même, on définie la fonction dérivée $3^{\text{ème}}$ (f''') de la fonction f. (et ainsi de suite)

Remarque

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction rationnelle est dérivable sut tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

4 Dérivée des fonctions usuelles

La fonction f	La fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto ax; a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto ax+b; a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$x \mapsto \sin(ax+b); a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$
$x \mapsto \cos(ax+b); a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$]-\infty;+\infty[$

a Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k, a et b trois nombres réels $(a \neq 0)$.

La fonction f	La fonction dérivée f'	La condition
$f+g$	$f'+g'$	-
kf	kf'	-
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$	g ne s'annule pas sur I
$\frac{1}{g}$	$-\frac{g'}{g^2}$	g ne s'annule pas sur I
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	-
$f^n; (n \in \mathbb{N}^*)$	$nf'f^{n-1}$	f strictement positive sur I
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$(ax+b) \in I$
$x \mapsto f(ax+b)$	$x \mapsto af'(ax+b)$	

Remarque

Avant de dérivée une fonction, il ne faut pas oublier de vérifier et rappeler que la fonction en question est définie et dérivable sur l'intervalle considéré.

Exercice d'application

Déterminer la dérivée de la fonction f, après avoir précisé son ensemble de dérivabilité, dans chacun des cas suivants :

1 . $f(x) = 2x^2 - 5$

2.$f(x) = -\frac{8}{3}x^5 - 5x^3 - 2x + 9$

3.$f(x) = \frac{-2}{2x-2}$

4.$f(x) = 8\sqrt{x} - x$

5.$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$

6.$f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$

7.$f(x) = \cos^3(2x-3) - \sqrt{x^2-2x}$

8.$f(x) = \frac{\sqrt{x-8}-x^2}{x^2-2x+6}$

II Complément sur la dérivation

1 Dérivabilité et continuité

Propriété

Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1}; & x \geq 0 \\ f(x)=x^2+\sqrt{1-x}; & x<0 \end{cases}$

1. Étudions la continuité de f en 0 .

On a : $f(0)=1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1}=1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2+\sqrt{1-x}=1$

Donc f est continue en 0 2 .Étudions la dérivabilité de f en 0 .

On a d'une part : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$

D'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^-} x-\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x \rightarrow 0^-} x-\frac{1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 , mais puisque $f_g'(0) \neq f_d'(0)$. Ainsi la fonction f n'est pas dérivable en 0 .

Remarque

- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

- Une fonction continue en a n'est pas forcément dérivable en a. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 .

2 Dérivée d'une fonction composée

Activité

f et g deux fonctions définies sur $I =]2;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
1. Montrer que f est dérivable sur I, puis calculer $f'(x)$.
2. Montrer que g est dérivable sur $f(I)$.
3. (a) Calculer gof (x) et $(g \circ f)'(x)$
(b) Vérifier que : $(\forall x \in I); (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

Propriété

Si f est dérivable en un point a et g en $f(a)$, alors gof est dérivable en a ; et on a :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et g sur $f(I)$, alors gof est dérivable sur I ; et on a :

$$(\forall x \in I) : (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Exemple

Soient f et g deux fonctions numériques définie par : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{x}{x-2}$.
Montrons que gof est dérivable sur $I =]1;+\infty[$ sans déterminer $(g \circ f)(x)$:
f est une fonction polynôme dérivable sur I et on a $f'(x) = 2x > 0$ sur I et
$f(I) =]\lim_{x\to 1^+} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)[=]2;+\infty[$.
D'autre part, la fonction g est rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{2\}$, en particulier, sur $f(I)$; et $g'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$.
Ainsi, la fonction gof est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x)\\ &= \frac{-2}{((x^2+1)-2)^2} \times 2x\\ &= \frac{-4x}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

Application

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Sans calculer $f \circ g(x)$ montrer que fog est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $(f \circ g)'(x)$.

1.Chapter 1 Dérivation

3 Dérivée de la fonction réciproque

Activité

Soit f la fonction numérique définie sur $I =]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2+1$
1 .(a) Montrer que f est continue et strictement croissante sur I.
(b) En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $I =]1;+\infty[$.
2. (a) Montrer que : $(\bigvee x \in]1;+\infty[) : f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.
(b) Vérifier que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
3 .(a) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ sur $]1;+\infty[$.
(b) Vérifier que : $(\forall x \in]1;+\infty[); \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.
- Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$; et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Si f est dérivable en I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$; et on a :

$$(\forall x \in f(I)); \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
1. Montrons que f admet une fonction réciproque :
En effet, la fonction polynôme $x \to x^2+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
Puisque $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
D'autre part, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$(car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$). Par conséquent, f admet une fonction réciproque définie sur $f(\mathbb{R}^+) = [1;+\infty[$.
2.Calculons $f(\sqrt{3})$ puis montrons que f^{-1} est dérivable en 2 et calculons $\left(f^{-1}\right)'(2)$ On a : $f(\sqrt{3}) = \sqrt{1+3} = 2$

Puisque f est dérivable en $\sqrt{3}$ et $f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(f'(\sqrt{3}) \neq 0\right)$, alors f^{-1} est dérivable en $f(\sqrt{3}) = 2$ et on a :
$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Application

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=x^3-3x$
1 .Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sue J.
3 .Calculer $f(\sqrt{2})$ et $\left(f^{-1}\right)'(-\sqrt{2})$, en déduire l'équation de la tangente de $\left(C_{f^{-1}}\right)$ en $-\sqrt{2}$.