

Limites et continuité



Rappel

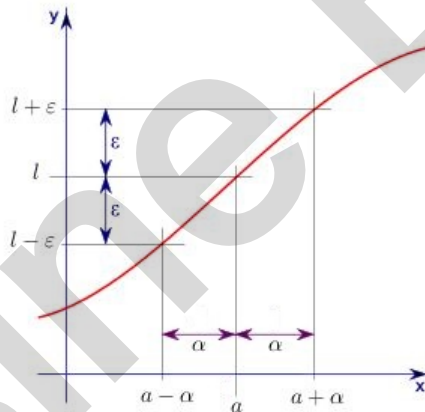
1 Limite d'une fonction en un point

Propriété

Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un réel a et l un réel. On dit que f tend vers l quand x tend vers a , ou que f a pour limite l en a si :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad (0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

On note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$



• Exemple

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 3x + 2$; En utilisant la définition montrons que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 17$

2 Unicité de la limite

Propriété

Si une fonction f admet une limite en un point, alors elle est unique.

EXEMPLES

Supposons que f admet deux limites $l_1 \neq l_2$ en un point a ; soit $(\varepsilon > 0)$ alors

$$(\exists \alpha_1 > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$(\exists \alpha_2 > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x - a| < \alpha_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$$

Prenons $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

Soit $\alpha = \inf(\alpha_1; \alpha_2)$, on a $(\forall x \in D_f) : 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$ et $|f(x) - l_2| < \varepsilon$ et puisque $|l_1 - l_2| = |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)|$

$$\text{donc } |l_1 - l_2| \leq |(f(x) - l_1)| + |(f(x) - l_2)| < \frac{|l_1 - l_2|}{2} + \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

$$\text{Alors } |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde

ainsi $l_1 = l_2$



3

Exercices :

Exercice

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$$

$$; 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

$$; 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} - 2}{x - 2}$$

$$; 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x - 1}$$

$$; 6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 2x^2 - 11x - 12}{x^4 - 81}$$

$$; 7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

$$; 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x}{\sqrt{2x^2 + x} - x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \tan x$$

$$; 10) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x + 1$$

Exercice

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + x$

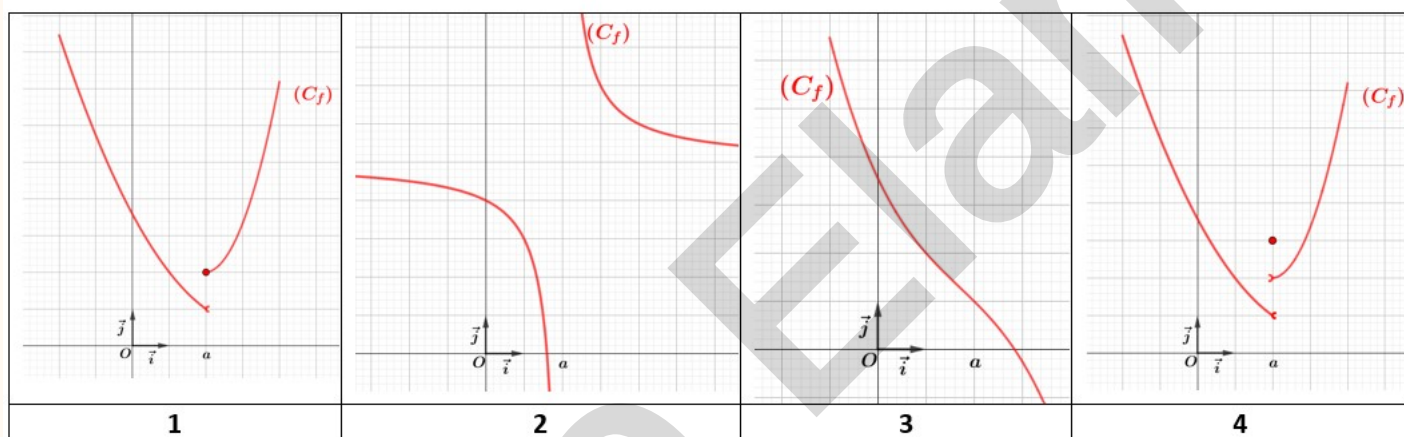
calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

II Continuité d'une fonction

1 Continuité en un point

Activité

Soit (C_f) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$



- 1 Comparer $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ avec $f(a)$ (si elle existe)
- 2 Que constate-t-on pour (C_f) au point A d'abscisse a ?

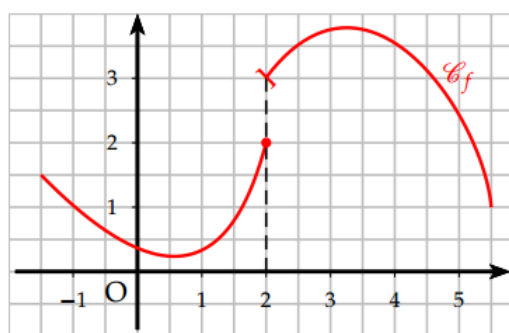
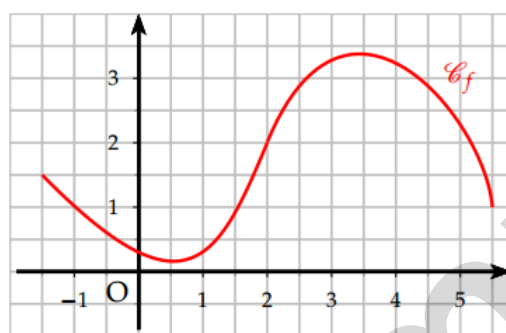
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est **continue au point** a si et seulement si $f(a)$ existe et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Remarque

- Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par une courbe en un seul morceau.

Fonction f discontinue en 2Fonction f continue sur $[-1, 5; 5, 5]$

- f est continue en x_0 si : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f) \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

• Exemple

- 1 On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La fonction est-elle continue en 1 ?

- 2 Soit g une fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Étudier la continuité de g en 0.

2 Continuité à droite, continuité à gauche

Activité

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1; 2]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{7\sin(a(x-1))}{x-1} & ; -1 \leq x < 1 \\ f(x) = 6x + a & ; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

- 1 Calculer $f(1)$ et démontrer que f est continue à droite en 1.
2 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.

Conclusion : Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite en x_0 .

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a; a + \alpha[$ ($\alpha > 0$). On dit que la fonction f est **continue à droite en a** si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a - \alpha; a]$ ($\alpha > 0$). On dit que la fonction f est **continue à gauche en a** si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Application

- 1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = (2-x)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^3 + x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 Étudier la continuité de f à gauche et à droite en 1.
- 2 Soit g une fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = x^2 + 2x & ; x \leq 1 \\ g(x) = \frac{a \sin(x-1)}{x-1} & ; x > 1 \end{cases}$$
 déterminer la valeur de a pour que g soit continue au point $x_0 = 0$.

3 prolongement par continuité

Activité

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{|x - 5| - 3}$

- 1 Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- 2 a Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- b Soit g la fonction définie sur $D_f \cup \{2\}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(2) = -2 \end{cases}$$
 Montrer que g est continue en 2.

On dit que f admet un prolongement par continuité en 2 et que g est son prolongement par continuité en 2.

Définition

Soit f une fonction non définie en a ($a \notin D_f$), et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$$

est une fonction **continue** en a et est appelée **le prolongement par continuité** de f en a

Application

- 1 Montrons que la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0
- 2 Montrons que la fonction g définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x - 1}$ admet un prolongement par continuité en 1

4 continuité sur un intervalle

Activité

Soit f une fonction définie sur $[0; \pi]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x} & \text{si } x \in]0; \pi] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0; \pi]$.

Définition

- ▶ Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I ssi elle est continue en tout point de I .
- ▶ Une fonction est continue sur un intervalle $]a; b[$ ssi elle est continue en tout point de $]a; b[$.
- ▶ Une fonction est continue sur un intervalle $[a; b]$ ssi elle est continue sur $]a; b[$, à droite en a et à gauche en b .
- ▶ De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; +\infty[$ et $] -\infty; b]$

Application

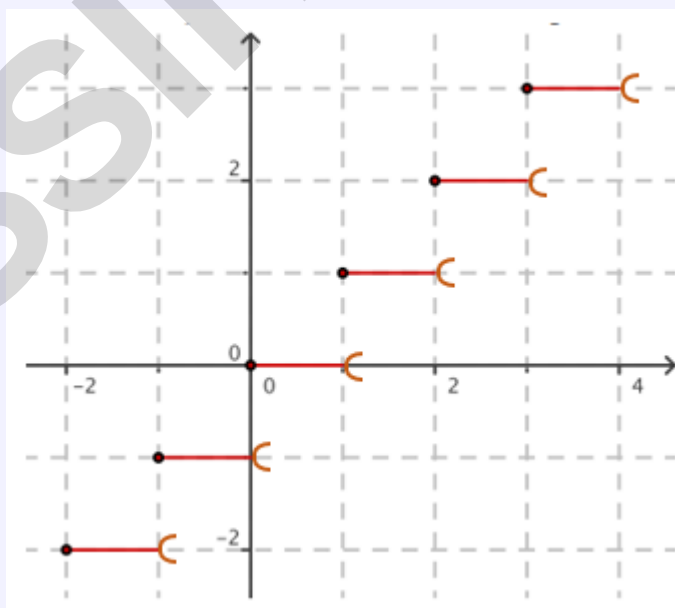
la fonction partie entière, notée $E(x)$ est définie par: pour tout réel x , il existe un entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. Alors $E(x) = n$.

On a $E(2.5) = 2$; $E(2) = 2$; $E(-2, 5) = -3$; $E(-3) = -3$.

La représentation graphique de cette fonction est donnée ci-contre. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas continue en chaque entier relatif.

Pour tout n de $\mathbb{Z}$ on a $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = n$

Puisque $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) \neq \lim_{x \rightarrow n^+} E(x)$ donc la fonction partie entière n'est continue en $n \in \mathbb{Z}$.



Propriété

- ▶ Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- ▶ Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition ;
- ▶ Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$;
- ▶ La fonction tangente est continue sur tout intervalle contenu dans son domaine de définition ;
- ▶ La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

5

Opération sur les fonctions continues

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

- ▶ Les fonctions $f + g$, λf et $f \cdot g$ sont continues en x_0 avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ▶ Si $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 ;
- ▶ La fonction $|f|$ est continue en x_0 ;

Application

- 1 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x - 1}$
Montrons que f est continue sur son domaine de définition.
- 2 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{3 - x}$
Montrons que g est continue sur $] -\infty; 3]$.

6

Continuité et composition

a

Continuité d'une fonction composée

Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I , et g une fonction continue sur un intervalle ouvert J , tel que $f(I) \subset J$.

Montrons que $g \circ f$ est continue sur I .

Soit $x_0 \in I$, et montrons que $g \circ f$ est continue en x_0

Soit un réel $\varepsilon > 0$, on a g est continue en $f(x_0)$ donc

$$(\exists \alpha_1 > 0)(\forall x \in J) \quad |x - f(x_0)| < \alpha_1 \Rightarrow |g(x) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad (1.1)$$

On a f est continue en x_0 donc pour α_1

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in I) \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha_1 \quad (1.2)$$

Donc d'après (1.1) et (1.2) on a :

$$|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha_1 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

par conséquent :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in I) \quad |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon$$

Propriété

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, on suppose que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I .

Application

- 1 Montrer que la fonction f définie par : $f(x) = \sin(x^2 + 3x - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- 2 Étudier la continuité de la fonction g définie par : $g(x) = \cos\left(\frac{x^2 + 2}{x - 1}\right)$.

Remarque

La réciproque de la propriété précédente n'est pas toujours vraie.

les fonction f et g définies par : $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et $g(x) = 4$

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad g \circ f(x) = 4$

$g \circ f$ est continue en 1 et f n'est pas continue en 1.

b

la composée d'une fonction continue et d'une fonction qui admet une limite

Activité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 et g une fonction définie sur un intervalle J tq : $f(I) \subset J$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ avec g est continue en l .

Montrons que $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$

- Soit h le prolongement par continuité de f en x_0

h est continue en x_0 donc $g \circ h$ est continue en x_0

$(g \circ f = g \circ h)$ alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ h(x) = g \circ h(x_0) = g(l)$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 et g une fonction définie sur un intervalle J tq : $f(I) \subset J$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et g est continue en l , alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$

Application

Calculer les limites suivantes :

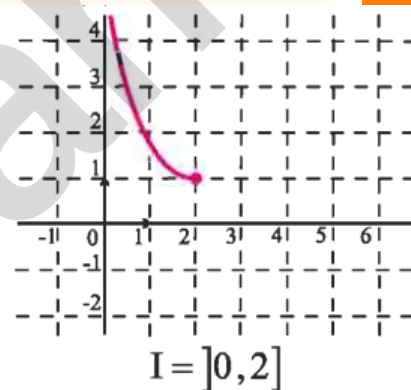
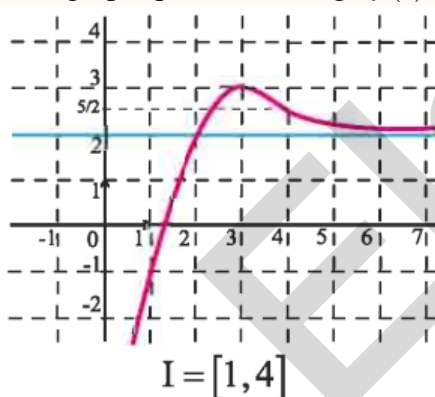
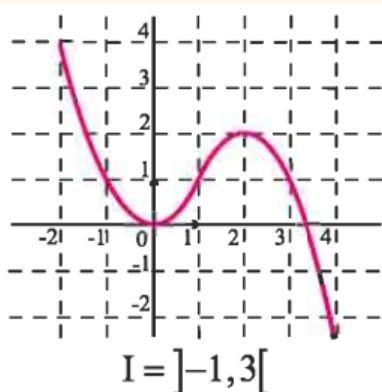
1 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \sin(x)}{2x}\right)$

2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x - 1}\right)$

7 Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité

Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I .

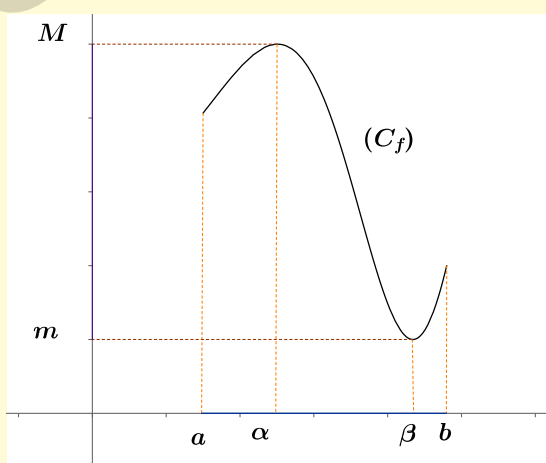


Propriété

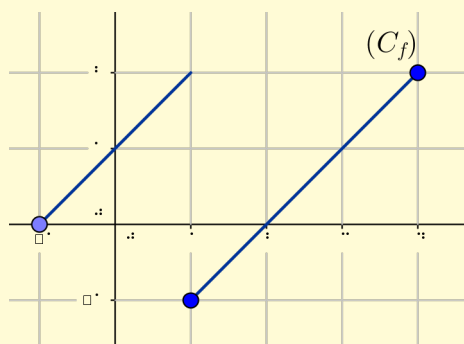
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque

- 1 Si f est continue sur $[a; b]$ alors $f[a; b] = [m; M]$ avec $M = \sup_{x \in [a; b]} (f(x))$ et $m = \inf_{x \in [a; b]} (f(x))$



- 2 Soit f une fonction (C_f) sa représentation graphique



$f([-1; 4]) = [0; 2]$ même si f est discontinue en 1
(La continuité de la fonction est une condition suffisante mais pas nécessaire)

8 Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Le tableau suivant précise l'intervalle $J = f(I)$ dans chacun des cas possibles pour I . (a et b désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$).

L'image de I par f est l'intervalle :		
Si $I =$	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x)[$

Application

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Déterminer les images des intervalles suivants par $f : I =]-\infty; 0]$ et $J = [1; 2]$

9 Théorème des valeurs intermédiaires

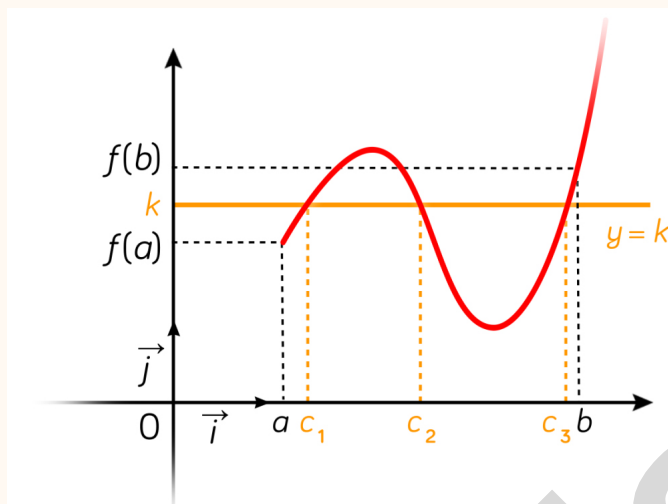
Activité

soit f une fonction continue sur $[a; b]$, donc il existe m et M de $\mathbb{R}$ $f\{[a; b]\} = [m; M]$

soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$; puisque $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à l'intervalle $[m; M]$;

donc $k \in [m; M]$

d'où $\exists c \in [a; b]$ tq $f(c) = k$



T

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Résultats :

- ▶ Si f est continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution dans $[a; b]$
- ▶ Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet **une unique** solution dans $[a; b]$

Application

- 1 Démontrer que l'équation suivante : $x^4 + x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[0; 1]$
- 2 Démontrer que l'équation suivante : $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ admet une solution unique dans $[-2; 0]$

10

Principe de la méthode de DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dont on peut déterminer un encadrement par dichotomie.

Principe de cette méthode :

- ▶ On calcule m le centre de $[a; b]$.
- ▶ Si $f(m)$ et $f(b)$ sont de même signe, c'est que la solution se trouve dans $[a; m]$: on affecte à b la valeur de m afin de pouvoir continuer le processus.
- ▶ Dans le cas contraire, la solution se trouve dans $[m; b]$: on affecte à a la valeur de m afin de pouvoir continuer le processus.
- ▶ On continue le processus jusqu'à obtenir un encadrement avec la précision voulue

• Exemple

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$

- 1 Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 < \alpha < 1$
- 2 Déterminons un encadrement de α de longueur 0,25



Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1 Théorème des fonctions réciproques

T

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$

EXEMPLES

Puisque I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est continue sur I alors $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$. Donc : $\forall y \in f(I), \exists x \in I : y = f(x)$

Soit a et b deux éléments distincts de I . Puisque f est strictement monotone sur I alors $f(a) > f(b)$ ou $f(a) < f(b)$, donc $f(a) \neq f(b)$. Alors pour tout $y \in f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I , et donc f est une bijection de I sur $f(I)$.

Activité

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [1; 3]$ par : $f(x) = x^2 - 2x$

- 1 Déterminer l'intervalle J l'image de l'intervalle I par f .
- 2 Soit x un élément de l'intervalle J et y un élément de l'intervalle I
Montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}$

- ▶ La fonction f est continue et strictement croissante sur I ; On dit que f admet **une fonction réciproque**
- ▶ La fonction définie sur l'intervalle $J = f(I)$ par : $x \mapsto 1 + \sqrt{x+1}$ c'est la fonction réciproque de la fonction f , on la note f^{-1} ; et on a

$$(\forall x \in J); \quad f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

Remarque

- ▶ f une fonction définie sur un intervalle I tq :
$$\begin{array}{ccc} f : & I & \longrightarrow J = f(I) \\ & x & \longmapsto f(x) = y \end{array}$$

- ▶ Si f admet une fonction réciproque f^{-1} alors : $f^{-1} : J \longrightarrow I$
 $y \longmapsto f^{-1}(y) = x$
- ▶ $(\forall x \in I)(\forall y \in J) \quad (f(x) = y) \Leftrightarrow (f^{-1}(y) = x)$
- ▶ $(\forall x \in I) \quad f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{et} \quad (\forall x \in J) \quad f \circ f^{-1}(x) = x$

Application

Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

- 1 Montrer que f est une bijection de $] -1; +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

2

Propriétés de la fonction réciproque**Activité**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

- La fonction réciproque $f^{-1}(x)$ est continue sur $f(I)$.
- Soit y_1 et y_2 deux éléments distincts de $f(I)$. $\exists (x_1, x_2) \in I^2 / y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$
 Donc $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$
 Alors : $\frac{f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)}{y_2 - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$
 Donc les taux de variation des fonctions f et f^{-1} ont le même signe d'où f et f^{-1} ont le même sens de variation.
- Soit C_f et $C_{f^{-1}}$ les graphes de f et f^{-1} respectivement dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(y, x)$ son symétrique par rapport à la première bissectrice. On a :

$$M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow M'(y, x) \in C_{f^{-1}}$$

D'où C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- ▶ La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variation que la fonction f .
- ▶ Les courbes représentatives de f et de f^{-1} , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la bissectrice (la droite d'équation $y = x$)

IV Fonctions réciproques usuelles

1 Fonction Arctangente

Définition

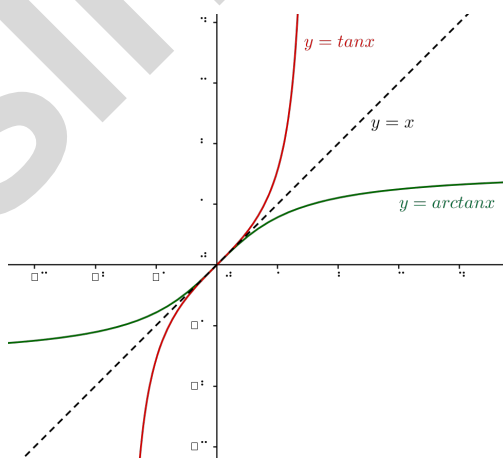
La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée fonction **Arctangente** et la note **Arctan**.

Propriété

- La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) (\arctan x = y \Leftrightarrow x = \tan y)$$

- $(\forall x \in \mathbb{R}) : \tan(\arctan x) = x$
- $\left(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right) : \arctan(\tan x) = x$
- La fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : (\arctan x = \arctan y \Leftrightarrow x = y)$ et $(\arctan x < \arctan y \Leftrightarrow x < y)$
- La fonction $x \mapsto \arctan x$ est impaire : $(\forall x \in \mathbb{R}) \arctan(-x) = -\arctan x$
- On a les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$



Exemple

- 1 Calculer : $\arctan(-1)$; $\arctan(-\sqrt{3})$; $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\arctan\left(\tan \frac{81\pi}{4}\right)$
- 2 Calculer les limites de la fonction f définie par : $f(x) = (x+1) \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ aux bornes de

son domaine de définition.

2

Fonction racine $n^{\text{ième}}$

Activité

Soit n un entier naturel non nul

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^n$

On a f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (restriction d'une fonction polynôme)

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Et puisque $f(\mathbb{R}^+) = f([0; +\infty[) = [f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n[= [0; +\infty[$

Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.

Définition

Soit n un entier naturel non nul

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est appelée **la fonction racine $n^{\text{ième}}$** et on la note $\sqrt[n]{}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit racine $n^{\text{ième}}$ de x .

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- ▶ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+2} : \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x; \quad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y; \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x.$
- ▶ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^4 - 16 = 0$; 2) $4x^6 + 1 = 0$; 3) $x^3 - 64 = 0$; 4) $1 + 8x^9 = 0$

Remarque

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ tq : $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

	n pair	n impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

Propriété

soit x et y deux réels positifs, et p et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{x} &= \sqrt[p]{x^p} ; & \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} &= \sqrt[p]{x} ; & \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} &= \sqrt[n]{xy} \\ (\sqrt[n]{x})^p &= \sqrt[n]{x^p} ; & \sqrt[n]{\frac{1}{x}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \text{ (avec } x \neq 0\text{)} ; & \sqrt[n]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \text{ (avec } y \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Exercice

Simplifions le nombre $A = \frac{\sqrt[6]{343} \times \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{216} \times \sqrt[4]{7}}{\sqrt[4]{49}}$

Remarque

Si $xy > 0$ on a $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{|x|} \sqrt[n]{|y|}$ et $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{|x|}}{\sqrt[n]{|y|}}$ avec $(y \neq 0)$

Application

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) : \sqrt[n]{x} \times \sqrt[p]{x} = \sqrt[np]{x^{n+p}}$

Propriété

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$:

- Si f est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I .
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

Application

- 1 Étudions la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{\arctan x}$ sur $\mathbb{R}^+$
- 2 calculons la limite : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$

Exercice

soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f .
- 2 Calculer les limites de f en 8 et en $+\infty$.

3 Puissances rationnelles d'un nombre strictement positif

Définition

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel. On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle de nombre a .

Exemple

$$5^{\frac{7}{2}} = \dots\dots\dots ; \quad 2^{-\frac{3}{5}} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots ; \quad 8^{\frac{1}{3}} = \dots\dots\dots$$

Remarque

- ▶ Si $r = 0$ on a : $a^r = \dots\dots\dots$
- ▶ $\sqrt{a} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Propriété

soit $r \in \mathbb{Q}$ et $r' \in \mathbb{Q}$ et a et b deux réels strictement positifs.

$$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} ; \quad (ab)^r = a^r \cdot b^r ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$$

Exemple

Simplifions le nombre $A = \frac{\sqrt[9]{125^2} \times \sqrt[4]{625} \times \sqrt{25^5}}{\sqrt[3]{5^{17}}}$

Exercice

- 1 Soit $x \in]0; 1[$; montrer que $x^{\frac{6}{7}} > x$.
- 2 En déduire que $\forall x$ et y de $]0; +\infty[$ on a : $\sqrt[7]{x^6} + \sqrt[7]{y^6} > \sqrt[7]{(x+y)^6}$.
($0 < \frac{x}{x+y} < 1$ et $0 < \frac{y}{x+y} < 1$)