

La continuité d'une fonction



Rappel

- 1 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 4}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x) - 2x}{x}$$

- 2 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 3} & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 6 & \text{si } x < 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{x|x^2 - 4|}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ g(2) = 8 \end{cases}$$

Étudier la limites de chacune des fonctions f et g en $x_0 = 2$.



La continuité en point - La continuité en Intervalle

Activité

On considère la fonction f et g tels que : $\begin{cases} f(x) = 2x + 3 & x \leq 1 \\ f(x) = f(x) = \frac{5}{x} & ; x > 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 2x - 3}{x^2 - 9} \\ g(-3) \neq 0 \end{cases}$

- 1 Calcule la limite de f en gauche et droite de 1 , Que peut déduire ?
2 compare $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ et $g(-3)$, que peut déduire ?

D

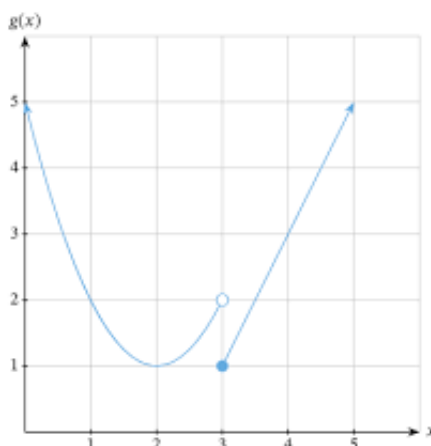
Définition

Soit f une fonction définie sur une intervalle ouverte I et $a \in I$
On dit f est continue sur a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Exemple

Soit g une fonction représenter graphiquement par :



En remarque que g pas continue en 1

1 La continuité à droite et à gauche

D Définition

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $[a; a+\alpha[$ tels que $\alpha > 0$
on dit que f continue à droite si :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]a-\alpha; a]$ tels que $\alpha > 0$
on dit que f continue à gauche si :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Application

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x}{x}; x < 1 \\ f(x) = 5x+1; 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \frac{9x+3}{2x}; x > 1 \end{cases}$$

1 Étudier la continuité de f sur la droite de 1 .

2 Étudier la continuité de f sur la gauche de 0 .

Propriété

Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouverte I et a un élément de I .

On dit que f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche de a .

C'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Application

- 1 On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $x_0 = 0$

- 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

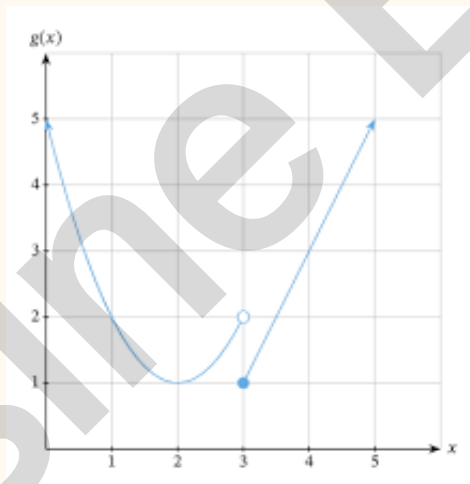
Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$.



La continuité sur un Intervalle

Activité

On considère la fonction g qui représenter par :



- 1 Est-ce que g est continue sur la droite de 3 et sur la gauche de 3 ?
- 2 Est-ce que g continue sur l'intervalle $[0; 2]$ et sur l'intervalle $[4; 5]$?

D

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouverte I .

On dit que f continue sur l'intervalle ouverte I si elle est continue sur tout les points de I

On dit que f continue sur l'intervalle $[a, b]$, si elle est continue sur l'intervalle ouverte $]a, b[$ et continue à la droite de a et à la gauche de b .

Remarque

f pas continue sur un intervalle si au moins pas continue en un point de cette intervalle

1 La continuité des fonctions usuelle

Propriété

- 1 toutes les fonctions polynomiales et $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont des fonction continue sue $\mathbf{R}$
- 2 toutes les fonction rationnel et irrationnel sont continue sur leur Domaine définition
- 3 la fonction $\sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Exemple

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x - 1}$

On a f est définie sur $\mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Or f est une fonction rationnelle alors elle est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition..

Donc f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

NB. On n'écrit pas f est continue sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Application

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Étudier dans chacun des cas suivants la continuité de f sur l'intervalle I .

- | | |
|---|---|
| 1 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 4$ et $I = [-4; 5]$; | 3 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ et $I = [-3, -2]$; |
| 2 $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$ et $I =]2; +\infty[$; | |

2 Les opérations sur les fonctions continues

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I .

- 1 les fonction $f+g$ et $f-g$ et $f \times g$ et $k \times f$ ($k \in \mathbf{R}$) sont des fonctions continues sur I
- 2 si $(\forall x \in I); g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I
- 3 Si $(\forall x \in I); f(x) \leq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue sur I

Application

Montrer que f est continue dans l'intervalle I pour chaque cas :

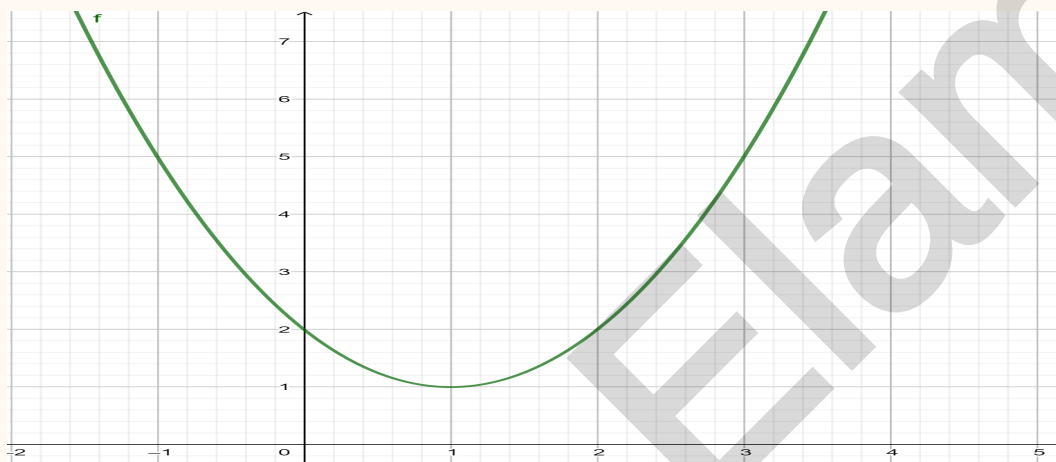
- 1 $f(x) = 3x^2 + x - 4$ et $I = \mathbb{R}$
- 2 $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x}$ et $I =]0; +\infty[$
- 3 $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 1}$ et $I = \mathbb{R}$
- 4 $f(x) = x + \sqrt{x - 2}$ et $I = [2; +\infty[$

IV IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1 Image d'un segment

Activité

Soit f une fonction représentée par la figure suivante :



Détermine l'image des intervalles suivantes : $f([0; 1])$ et $f([2; 3])$ et $f([-1; 0])$

Remarque

- Image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle .
- Image d'un segment par une fonction continue est un segment .

2 L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I .

$a \in I$ et $b \in I$

1 f est continue et strictement croissante :

- a $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$
- b $f([a; b[) = [f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
- c $f(]a; b]) =]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$

2 f est continue et strictement décroissante :

- a $f([a; b]) = [f(b); f(a)]$
- b $f([a; b[) =]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
- c $f(]a; b]) = [f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

Application

Étudier la continuité et la monotonie de f dans chaque intervalle I et J puis calculer $f(I)$ et $f(J)$ pour chaque cas :

- 1 $f(x) = 2x-1$ et $I = [0; 1]$ et $J =]-\infty; +\infty[$
- 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ et $I = [\frac{1}{2}; 1]$ et $J =]0; +\infty[$
- 3 $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ et $I = [1; +\infty[$ et $J =]0; 1[$
- 4 $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ et $I =]-\infty; 0[$ et $J =]0; +\infty[$

Application

Soit f une fonction continue sur les deux intervalles $] -\infty; 2[$ et $]2; +\infty[$.
Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	1	2	0	$-\infty$	1

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans les cas suivants :

- | | | |
|----------------|----------------------|----------------------|
| 1 $I = [0; 1]$ | 3 $I =]-\infty; 0[$ | 5 $I =]-\infty; 2[$ |
| 2 $I = [0; 2[$ | 4 $I =]2; +\infty[$ | |

V**Théorème des valeurs intermédiaire**

T

Théorème

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et a et b deux éléments de I .
Pour tout α compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins c compris entre a et b tel que : $f(c) = \alpha$

Résultat 1 :

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ donc il existe au moins un élément c sur $]a; b[$ tels que : $f(c) = 0$

Résultat 1 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ donc il existe une unique élément c sur $]a; b[$ tels que : $f(c) = 0$

Exemple

Soit f une fonction définie par : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet au moins une solution sur l'intervalle $]1; 2[$

VI La continuité du fonction composé

Propriété

Soit f et g deux fonction , si f continue sur I et g continue sur J et $f(I) \subset J$
Alors $g \circ f$ est continue sur I .

VII La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité

Soit f une fonction numérique définie sur $I = [1 ; 2]$ par : $f(x) = x^2 + 1$

- 1 Montrer que f continue et strictement croissante sur I
- 2 Détermine J l'image d'intervalle I par fonction f
- 3 Soit $x \in J$ et $y \in I$ tel que : $f(y) = x$
Écrire y en fonction de x

Remarque

Si f continue et strictement monotone sur l'intervalle I alors on dit que f admet une fonction réciproque sur I .

D

Définition

Soit f continue et strictement monotone sur l'intervalle I , on a f admet une fonction réciproque $f^{-1}(x)$ définie de $J = f(I)$ est on écrit :

$$\forall x \in J, \forall y \in I$$

$$f(y) = x \iff y = f^{-1}(x)$$

Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x - 4}$ et $I = [2 ; +\infty[$

- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qui peut déterminer

Propriété

Si f une fonction continue et strictement monotone sur I et f^{-1} la fonction réciproque de f , Alors :

- f^{-1} est une fonction continue sur $J = f(I)$
- f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et à la même monotonie de f sur I .
- la représentation graphique de f^{-1} est la symétrique de courbe f par rapport la droite $y=x$ dans un repère orthonormé directe .