

Limite et continuité



RAPPELS

1 Les opérations sur les limites

Limite de la somme

Soit $(l, l') \in \mathbb{R}^2$

$\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

Limite des produit

Soit $(l, l') \in \mathbb{R}^2$

$\lim f$	l	$l > 0$ où $+\infty$		$l < 0$ où $-\infty$		0	
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

Limite des inverses

Soit $l \in \mathbb{R}^*$

$\lim f$	l	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Limite des quotients

Soit $(l, l') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$\lim f$	l	l'	l'	$l > 0$ où $+\infty$	$l < 0$ où $-\infty$	$+\infty$		$-\infty$		∞	0		
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	∞	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$F.I$

Propriété

Soient f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 et $l \in \mathbb{R}$

- Si $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ où $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $f(x) \geq 0$ alors $l \geq 0$
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ et $f(x) \geq g(x)$ alors $l \geq l'$

Exercice

1 Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 5}{1 - x^3}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 - \sqrt{x + 3}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt{x} + 1} - \sqrt{\sqrt{x} + x}$

4 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1 - \cos x} - \sin^2 x - \sqrt{3}}{1 - \tan x}$

5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{|1-x^2|}$

Exercice

2 Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{a^2 x^3 - 2ax}{x} + 1 - x^2 \left(a \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$; avec $a \in \mathbb{R}^*$

1 Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2 Montrer que : $\forall x \in D_f$
 $f(x) = 1 - 2a + a^2 \left(\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right)^2$

3 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (a-1)^2$

Exercice

3 Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{1}{x+a} - \frac{a^2 x^2}{a^3 + x^3}$; avec $a \in \mathbb{R}$

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2 Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet une limite quand x tend vers $-a$

3 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{bx^2 + (c+1)x - d}{a^3 + x^3}$ avec $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs de b, c et d en fonction de a pour lesquelles $f(x) = g(x)$

4 On pose $a = 2$; calculer $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x)$

Exercice

4 Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 2}{x}$;

1 Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g

2 Montrer que : $\forall x \in D_g$
 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{1-x}+1}$

3 Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

Exercice

5 Soit h ; h_1 et h_2 des fonctions numériques définie par : $h(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2x + 2}{x^2 - 4}$;

$$h_1(x) = \frac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\text{et } h_2(x) = -\frac{2}{x+2}$$

1 Déterminer D_h l'ensemble de définition de la fonction h

2 Montrer que : $\forall x \in D_h$
 $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$

3 Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

Exercice

6 Soit u la fonction numérique définie par : $u(x) = \frac{x^2 \sqrt{x+2} - 8}{4 - x^2}$

1 Déterminer D_u l'ensemble de définition de la fonction u

2 Montrer que : $\forall x \in D_u$
 $u(x) = -\frac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x+2}+2)} - 2$

3 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = \frac{-9}{4}$



Continuité d'une fonction numérique

1 Continuité d'une fonction en un point

Activité

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}, & x \neq 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2 Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$

Définition 1.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre x_0 .

- On dit que la fonction f est continue au point x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- On dit que la fonction f est discontinue au point x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

EXEMPLE

1 On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x^2-2x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \\ f(1) = \frac{5}{2} \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction f au point $x_0 = 1$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x + 1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x + 1}{x+1} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

Donc f est continue au point $x_0 = 1$

2 On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-x-1}{x}, & x \neq 1 \\ g(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Étudions la continuité de la fonction g au point $x_0 = 0$

Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \frac{x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} - 1 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(1)$.

Donc f est discontinue au point $x_0 = 1$

Application

- 1 Déterminer la valeur de α pour laquelle la fonction g soit continue au point x_0

a $\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}, & x \neq 1 \\ g(1) = \alpha \end{cases} ; x_0 = 1$

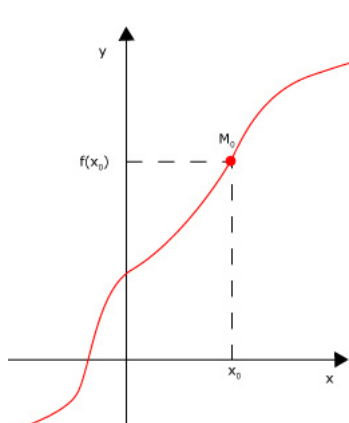
b $\begin{cases} g(x) = \frac{2\tan(x) + \sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = \alpha \end{cases} ; x_0 = 0$

- 2 Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction h soit continue au point x_0

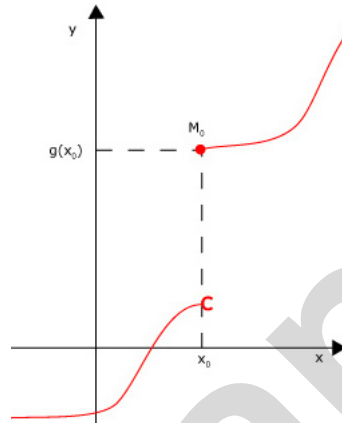
a $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{2x+2} - x^2 - a}{x-1}, & x \neq 1 \\ h(1) = b - 3a \end{cases} ; x_0 = 1$

b $\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)+3} - 2(x-a)}{x}, & x \neq 1 \\ h(1) = b^2 - a \end{cases} ; x_0 = 0$

c $\begin{cases} h(x) = \frac{-2(x-a)^2}{+} 3x - a + 3x, & x \neq 0 \\ h(0) = b^2 + 3b - 4 \end{cases} ; x_0 = 0$

a Interprétation graphique

f est continue au point x_0 , signifie que la courbe représentatif de la fonction f



g est discontinue au point x_0 , signifie que la courbe représentatif de la fonction g

b Continuité à droite - Continuité à gauche**Définition 1.2**

- 1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0, x_0 + r[$ avec $(r > 0)$
On dit que la fonction f est continue à droite de x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- 2 Soit f une fonction définie sur l'intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0[$ avec $(r > 0)$
On dit que la fonction f est continue à gauche de x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

EXEMPLE

- 1 Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + 2 & ; x > -2 \\ f(-2) = 2 \end{cases}$$

Étudions la continuité de la fonction f à droite de $x_0 = -$, calculons $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+2}{\sqrt{x+2}} + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2} \times \sqrt{x+2}} + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{(x+2)\sqrt{x+2}}{x+2} + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \sqrt{x+2} + 2 \\ &= 2 = f(-2) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2)$, alors f est continue à droite de -2

- 2 On considère la fonction g définie par :
- $$\begin{cases} g(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{1-x}} + & ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + x - 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

Étudions la continuité de la fonction g à gauche de $x_0 = 1$, calculons $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 3x + 2}{\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 - 3x + 2)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x} \times \sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^3 - 3x + 2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{1-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} - \frac{(x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} - (x-1)^2(x+2)\sqrt{1-x} \\ &= 0 = f(1) \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = f(1)$, alors g est continue à gauche de 1

Théorème

Une fonction numérique est continue au point x_0 si elle est continue à droite et à gauche au point x_0

$$(f \text{ est continue au point } x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Application

Étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche de x_0

1 $(x_0 = 2)$
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2} & ; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-2} & ; x < 2 \\ f(2) = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

2 $(x_0 = 4)$
$$\begin{cases} g(x) = \frac{16-x^2}{|x-4|} & ; x \neq 4 \\ f(4) = 8 \end{cases}$$

$$3 \quad (x_0 = 1) \quad \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 2x - 1}{x-1} - 1 & ; x > 1 \\ f(x) = \frac{x^3 - 1}{x-1} & ; x < 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

2 Les opérations sur les fonctions continues

a Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition 1.3 Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I et $[a, b] \subset I$ (a et b deux réels $a < b$)

- ▶ On dit que f est continue sur $]a, b[$, si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- ▶ On dit que f est continue sur $[a, b[$, si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- ▶ On dit que f est continue sur $]a, b]$, si elle est continue sur $]a, b[$ et à gauche de b
- ▶ On dit que f est continue sur $[a, b]$, si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a et à gauche de b

Remarque

- ▶ Si f est continue sur $[a, b]$, et sur $[b, c]$ alors elle est continue sur $[a, c]$
- ▶ Généralement : si f est continue sur I et sur J et $I \cap J \neq \emptyset$, alors f est continue sur $I \cup J$

b Les opérations sur les fonctions continues

Propriété

1 Si f et g deux fonctions continue en a alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

Sont continue en a

2 Si f et g deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors :

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

Sont continue en a

3 si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque

la propriété précédente reste vraie soit à droite de a , à gauche de a où sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Résultat :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- La fonction $x \rightarrow \tan(x)$ est continue sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$; avec $k \in \mathbb{Z}$

III Image d'un intervalle par une fonction continue

1 Image d'un segment (intervalle fermé)

Théorème

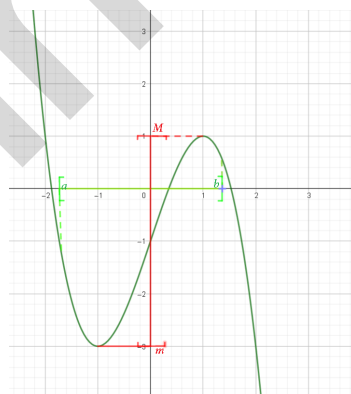
L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où : $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

La courbe ci-contre est

la courbe de la fonction

$$f(x) = -x^3 + 3x - 1$$

$$f([a, b]) = [m, M]$$



Cas particulier :

- Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors : $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors : $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

2 Image d'un intervalle

a Théorème général

Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Remarque

l'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme

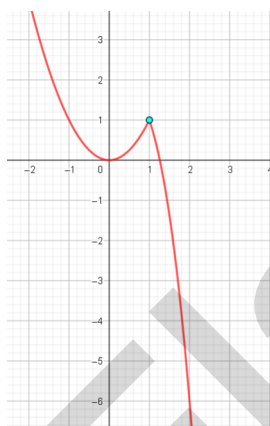
Dans le cas de la courbe ci-contre

$$f([0, 2]) = [-6, 1]$$

► $]0, 2]$ est un intervalle semi-ouvert

► $[-6, 1]$ est un intervalle fermé

De même on a : $f([-1, 1]) = [0, 1]$



b cas d'une fonction strictement monotone

L'intervalle I	$f(I) : f$ strictement croissante	$f(I) : f$ strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, +\infty$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

Remarque

Si f n'est pas strictement monotone sur I , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle I en intervalle où f est strictement monotone et on utilise la propriété $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$

Application

1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

a Dresser le tableau de variations de la fonction f

b Déterminer les images des intervalles suivants : $] -1, 0]$; $[1, 2]$; $[4, 5[$; $[-3, +\infty[$

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{a}\}$ par : $g(x) = \frac{-2ax-1}{ax+1}$;

avec $(a \in \mathbb{R}^*)$

- a Étudier les variations de g selon les valeurs de a
- b On pose $a > 1$. Déterminer les images des intervalles suivants : $[-a-2, -a-\frac{1}{a}]$; $]\frac{1}{a}, a^2]$ et $[a, +\infty[$

IV Composition de deux fonctions

1 Continuité de la composition de deux fonctions

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction définie sur l'intervalle $f(I)$ et x_0 un élément de I

- Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0
- Si f est continue sur I et g continue sur $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue sur I

EXEMPLE

1 La fonction $x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$ car :

- $u : x \rightarrow \frac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]1, +\infty[$
- $v : x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $u(]1, +\infty[) = \mathbb{R}^+$

2 $x \rightarrow x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \rightarrow \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

3 La fonction $x \rightarrow \cos\left(\frac{1}{x^4+2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car :

- $x \rightarrow x^4 + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule sur $\mathbb{R}$ donc $x \rightarrow \frac{1}{x^4+2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $x \rightarrow \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

4 Les fonctions $x \rightarrow \sqrt{x^2-4x+9}$; $x \rightarrow \sin\left(\frac{x^3+2x-1}{x^2+1}\right)$; $x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2-x+1}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

2 Limite de $g \circ f$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert pointé de centre x_0 et que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

Si g une fonction continue sur I alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$

Application

Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\pi \frac{\sin(4x)}{3x} \right)$

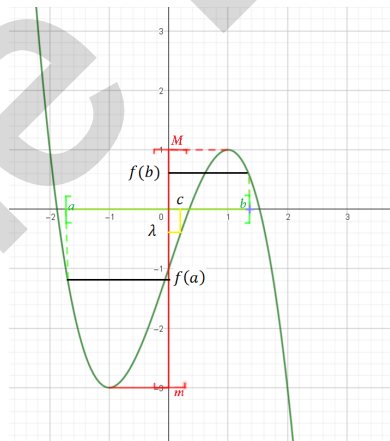
2 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin \left(\pi x \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) \right)$

**Théorème des valeurs intermédiaires****1 Cas général****Théorème**Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ En d'autres termes : l'équation $f(x) = \lambda$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Soit f une fonction continue sur
un intervalle I ; a et b deux éléments
de I tel que $a < b$

Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ Donc $\lambda \in f([a, b])$

Donc λ admet au moins un antécédent
 c dans l'intervalle $[a, b]$

D'où pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ **Corollaire**Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ **2 Cas f strictement monotone****Théorème**Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Corollaire

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$

Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

EXEMPLE

Montrons que l'équation $x^3 + 2x = 1$ admet une racine unique dans $\alpha \in \mathbb{R}$, puis vérifier que $\alpha \in [0, 1]$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 2x - 1$

- ▶ f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme)
- ▶ f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 3x^2 + 2$
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ▶ $0 \in f(\mathbb{R})$ car :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= \mathbb{R} \text{ (} f \text{ est strictement croissante)}$$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x = 1$$

Donc : l'équation $x^3 + 2x = 1$ admet une racine unique dans $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{Comme } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f(\alpha) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{donc : } f(0) < f(\alpha) < f(1)$$

Et puisque f est une fonction strictement croissante alors $0 < \alpha < 1$

Application

- 1 Montrer que : $\exists ! c \in [-\frac{1}{2}, 0] / \sqrt{c+1} = \frac{-2c}{c+1}$
- 2 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $(\forall x \in \mathbb{R}) ((f(x))^2 = 1$
Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$
- 3 soient g et φ deux fonctions définies sur $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$ et $g(x) = \varphi(x + \frac{1}{2}) - \varphi(x)$.
Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$
- 4 Soit ϕ une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x)}{x} < 1$
Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^*$

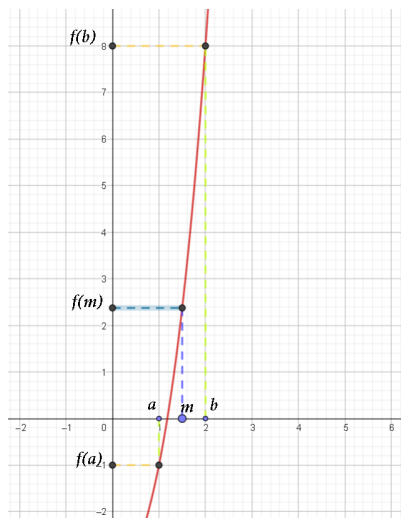
3 Principe de la méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ telle que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[a, b]$

Pour déterminer un encadrement du nombre α , on démarre donc en ayant localisé la racine α entre a et b ($a < \alpha < b$); et on sait par exemple que sur cet intervalle, la fonction f est continue, strictement croissante

On calcule alors le centre m du segment $[a, b]$ ($m = \frac{a+b}{2}$), puis son image par la fonction $f : f(m)$ et on la compare à 0

Deux cas peuvent alors se produire :

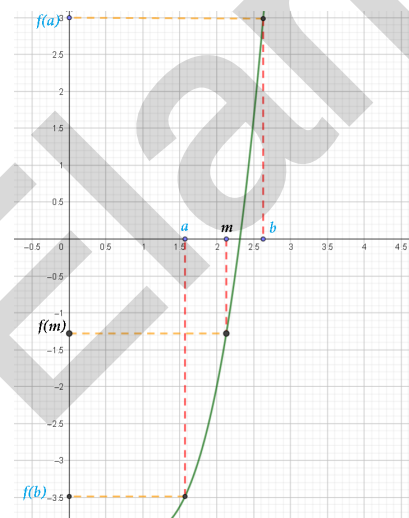


Cas où $f(m) > 0$

On a alors $a < \alpha < m$. On reprend la bisection de l'intervalle en posant

$$a = a \text{ et } b = m$$

puis on continue comme précédemment



Cas où $f(m) < 0$

On a alors $m < \alpha < b$. On reprend la bisection de l'intervalle en posant

$$a = m \text{ et } b = b$$

puis on continue comme précédemment

EXEMPLE

Soit f une fonction définie par $f(x) = x^3 + 2x - 1$. On sait que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, 1[$, déterminons un encadrement de α de longueur 0.25

Soit $c_1 = \frac{1}{2}$ le centre de l'intervalle $[0, 1]$ Comme :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ d'amplitude $\frac{1-0}{2} = 0.5$

Soit $c_2 = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ le centre de l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ Comme :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ d'amplitude $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$

VI Fonctions réciproques

Activité

Soit f une fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1$

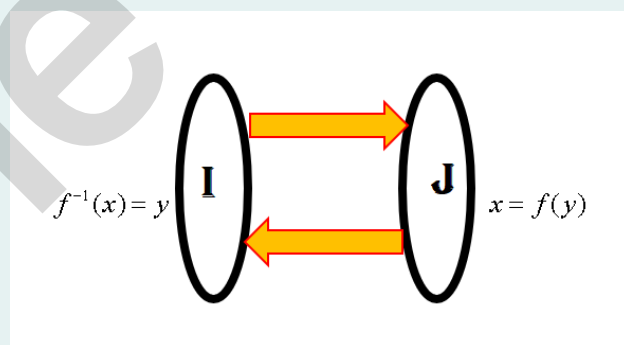
- 1 Étudier la continuité de f sur I
- 2 Montrer que f est strictement croissante sur I
- 3 Calculer $J = f(I)$
- 4 On considère l'équation $f(y) = x$, montrer que $y = \sqrt{x+1}$
- 5 Soit g la fonction définie sur J par : $g(x) = \sqrt{x+1}$
Comparer $f(1)$ et $g(0)$; $f(2)$ et $g(3)$; $f(3)$ et $g(8)$. Que peut-on déduire

Théorème

Si f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors : f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur $J = f(I)$ à valeur dans I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\forall x \in J)(f \circ f^{-1})(x) = x \\ (\forall x \in I)(f^{-1} \circ f)(x) = x \end{cases}$$

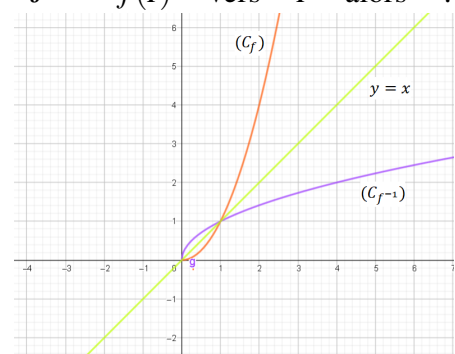


► Si $b \in f(I)$ alors l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique dans I

Propriété

Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors :

- $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) les courbes respectivement des fonction f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$
- f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I



Application

- 1 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de f^{-1} pour tout $x \in J$
- $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1, +\infty[$ ► $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et $I =]-\infty, 2[$
- $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ et $I =]-\infty, 0[$ ► $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ et $I = [0, \sqrt{2}]$
- 2 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$
- a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}
- c Calculer $f^{-1}(x)$ ($\forall x \in J$)

VII Fonction racine n -ème**1** Définition et règle de calcul**Activité**

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2 Montrer que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- 3 En déduire que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Définition 1.4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ la fonction $x \rightarrow x^n$ est continue strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ s'appelle la fonction racine n -ième est se noté $\sqrt[n]{x}$

Conséquence de la définition :

- La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq 0$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$
- La fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue strictement croissante alors
 - ◆ $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
 - ◆ $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq y \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y^n$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l \geq 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$

Remarque

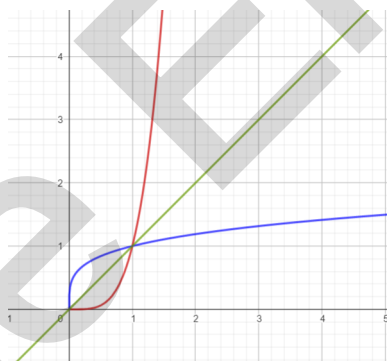
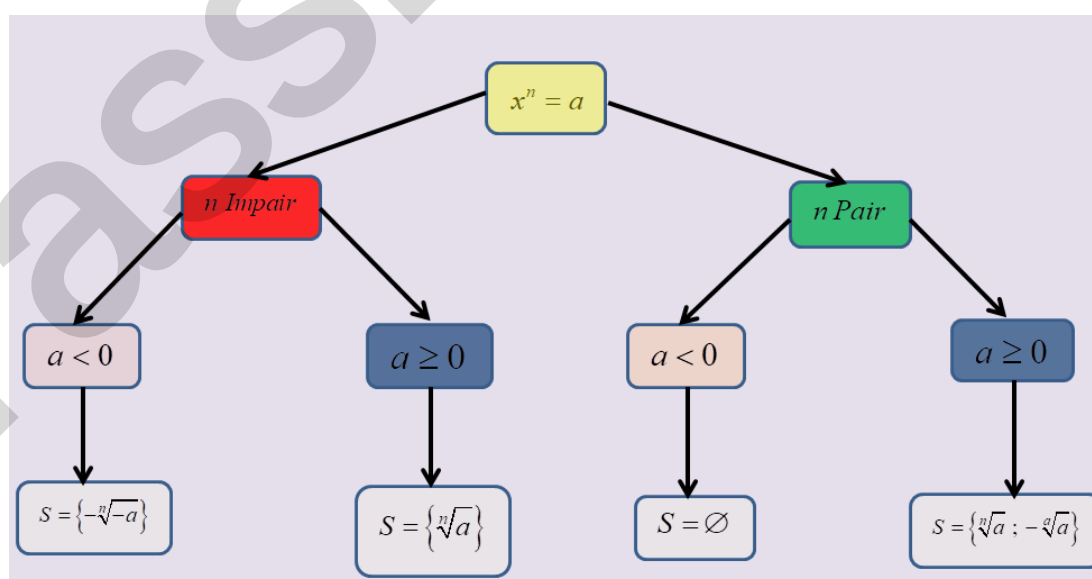
- i) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
- ii) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[4]{x} = x$

La courbe de la fonction $\sqrt[n]{}$

Voici la courbe de la fonction $f : x \rightarrow x^4$

sur $[0, +\infty[$ et la courbe de

sa fonction réciproque $f^{-1} : x \rightarrow \sqrt[4]{x}$

**L'équation $x^n = a$ ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$)**

ApplicationRésoudre dans $\mathbb{R}$:

- ◆ $x^5 = 1$
- ◆ $(x^2 - 1)^3 = -27$
- ◆ $\sqrt[5]{x} - 5\sqrt[10]{x} + 6 = 0$
- ◆ $\sqrt[8]{x} - x = 0$
- ◆ $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

2 L'expression conjuguai**Ordre 3 :**

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}$$

Ordre 4 :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+); \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}}$$

A remarque qu'on ne peut pas factoriser : $x^4 + y^4$

Application

- 1**
- Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{16} \times \sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}; \quad B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{729}}}$$

- 2**
- Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

- 3**
- Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1}-1}{\sqrt[4]{2x+8}-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3}$$

3 Puissance rationnelle

Puissance entier

Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a :

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{et } x^0 = 1 \text{ si } x \neq 0$$

Puissance rationnelle

Propriété

Pour tout réel x et pour tout entier naturel q non nul on a : $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$

Propriété

Soit x un réel et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) avec $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ on a : $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$

Propriété

Soit x et y deux réels positifs, r et r' deux rationnels on a :

- ▶ $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
- ▶ $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
- ▶ $x^{-r} = x^r = \frac{1}{x^r} \quad (x \neq 0)$
- ▶ $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}}$
- ▶ $(xy)^r = x^r \times y^r$
- ▶ $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad (y \neq 0)$

Application

Soient x et y deux réels non nuls, simplifier les nombres suivants :

$$1 \quad A = \frac{x^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{3}{4}}}$$

$$2 \quad B = \frac{(xy)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[6]{x^{-2}}}{x^{\frac{3}{4}} \sqrt[6]{xy}}$$

$$3 \quad C = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \times \sqrt[6]{x^{-4}}}{(yx)^{\frac{1}{4}} \sqrt[12]{xy}}$$